OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1914. N° 5—6.

NOTE OM ARCHIMEDES' TYNGDEPUNKTSLÆRE.

AF

C. JUEL.

FORELAGT I MØDET D. 13. NOV. 1914.

Archimedes' to stereostatiske Skrifter: Om plane Figurers Ligevægt eller om plane Figurers Tyngdepunkter, Bog I og II, hører til Oldtidens mest kendte Skrifter af exakt videnskabelig Natur. Som det væsentlige ved dette Arbejde har man hovedsagelig betragtet den deri indeholdte systematiske Udvikling om Vægtstangens Ligevægt. Dette er sikkert rigtigt nok, naar man tager Hensyn til den Betydning, Læren om Vægtstangen har haft for Statikens Udvikling gennem Middelalderen og et godt Stykke ind i den nyere Tid. Men betragter man udelukkende Skriftet selv, saaledes som det foreligger, er dette, som vi skal se, paa ingen Maade Tilfældet. At man med Sikkerhed kan kommentere dette Oldtidsskrift beror naturligvis paa, at man i J. L. Heibergs Archimedesudgave har det paalidelige Tekstgrundlag.

Af de to Dele, hvoraf Skriftet bestaar, handler den anden Del om Tyngdepunktet for et parabolsk Segment, medens den første giver det almindelige Grundlag sammen med simple og vigtige Anvendelser. Overgangen til Arealer med krumliniet Begrænsning har naturligvis i rent mathematisk Henseende stor Interesse, men den har for os i denne Forbindelse mindre Betydning, og vi vil i det følgende alene holde os til Bog I og prøve paa at betragte den deri indeholdte Tyngdepunktlære uafhængigt af Ligevægstlæren.

En saadan Undersøgelse synes at maatte vanskeliggøres noget derved, at Archimedes i sine Postulater sammenblander Forudsætninger fra det ene og det andet Omraade — han ønsker jo at sige noget om begge. Rent umiddelbart set synes Postulaterne endog særlig at tage Hensyn til Ligevægtslæren. Men ser man bort fra den Form, hvori Postulaterne er udtrykte i Ord, og ser man paa den Maade, hvorpaa de er brugt i Beviserne, bliver Forholdet et helt andet. Det vil vise sig, at Archimedes netop med de Postulater, han har, ikke blot kan opbygge, men faktisk opbygger en af Ligevægtslæren aldeles uafhængig Tyngdepunktslære, hvorved han dog gaar ud fra, at Tyngdepunktet existerer. Det er i og for sig ogsaa muligt at opbygge en Ligevægtslære independent og støtte en Tyngdepunktslære paa den, men af en saadan Tankegang findes intet Spor hos Arkimedes.

De Postulater, Archimedes stiller i Spidsen, er følgende:

1. Ligestore Vægte ophængte i ligestore Afstande er i Ligevægt, men ikke i Ligevægt, naar de ophænges i uligestore Afstande — og de hælder til den Side, hvor den største Afstand findes.

2. Dersom to Vægte ophængte i visse Afstande er i Ligevægt, og den ene forøges, vil de ikke længere være i Ligevægt, men hælde til den Side, hvor Forøgelsen er sket.

3. Det analoge Postulat, idet den ene Vægt formindskes.

4. og 5. Tyngdepunkterne for to kongruente eller ligedannede Figurer ligger i ensliggende Punkter.

6. Naar to ophængte Størrelser er i Ligevægt, vil Størrelser, der er ligestore med dem ogsaa være i Ligevægt, naar de ophænges i samme Afstande.

7. Tyngdepunktet for en Figur, hvis Omkreds overalt krummer til samme Side, ligger indeni Figuren.

Til at begynde med er hver enkelt Bestemmelse i disse Postulater uklar.

Der tales for det første om ligestore Vægte eller Størrelser. I dette Arbejde, hvor der kun er Tale om plane Figurer, er der imidlertid ingen Tvivl om, at han ved ligestore Størrelser simpelt hen forstaar Figurer med samme Areal — og ved uligestore Størrelser Figurer, der ikke har samme Areal. Dette er ogsaa i Overensstemmelse med den sædvanlige Brug af disse Ord i Oldtidens Geometri.

Dernæst tales der om, at Figurer er i Ligevægt, naar de ophænges, men der siges intet om, hvordan de ophænges, og lige saa lidt om, hvad det er for Afstande, der skal være ligestore eller uligestore.

For at komme videre maa vi betragte det første Sted, hvor han er nødt til at benytte Postulaterne i en Form, der tillader ham at føre et mathematisk Bevis.

Vi maa da gaa til Sætning IV eller bedre strax til VI, der lyder:

To kommensurable Størrelser er i Ligevægt, naar de ophænges i Afstande, der er omvendt proportionale med Vægtene.

Beviset herfor begynder ordret paa følgende Maade:

Lad de to kommensurable Størrelser være A og B og A og B være deres Tyngdepunkter. Lad ED være en ret Linie delt saaledes i C, at $A : B = DC : CE$. V i s k a l d a b e v i s e, at naar A s t i l l e s i E og B i D, b l i v e r P u n k t e t C T y n g e p u n k t e t f o r d e n F i g u r, d e r e r s a m m e n s a t a f d e t o g i v n e.

Ved den — her spærrede — som selvfølgelig betragtede Omskrivning af det, der skal bevises, faar vi fuldstændig Besked om meget af det, der var uklart ved Postulaternes Formulering.

For det første faar vi at vide, at han derved, at Figurerne er i Ligevægt ved at ophænges et i Punkt C, forstaar, at den samlede Figurs Tyngdepunkt ligger i C.

For det andet ser vi, at de tidligere udefinerede »Afstande« skal betyde Afstandene fra Ophængningspunktet til de to Figurers Tyngdepunkter. At det kun kommer an paa Tyngdepunkterne og Størrelsen af Delene er udtrykt i Postulat 6.

Endelig faar man at vide, at Archimedes i sine Beviser uden videre gaar ud fra, at Tyngdepunktet for en af to Dele sammensat Figur ligger i den Linie, der forbinder Delenes Tyngdepunkter.

Vi ser nu for det første heraf, at den første Del af Postulat 1., efter det Archimedes selv siger, han vil forstaa ved Ligevægt, i Virkeligheden udsiger, at Tyngdepunktet for en af to lige store Figurer sammensat Figur ligger i Midtpunktet af den Linie, der forbinder Delenes Midtpunkter. Ganske vist opstiller Archimedes ogsaa dette som en Sætning, nemlig som Sætning IV, men det Bevis, han giver derfor, betyder ikke andet, end at han her for første Gang definerer, hvad han vil forstaa ved, at to Figurer er i Ligevægt (en Henvisning til Sætning III i ældre Udgaver er aabenbart falsk og findes heller ikke i den Heibergske Udgave).

Vi maa nu se lidt paa den sidste Oplysning, vi fik, nemlig den, at Archimedes uden videre gaar ud fra, at Tyngdepunktet for en af to Dele sammensat Figur ligger i Forbindelseslinien mellem Delenes Tyngdepunkter. Archimedes maa enten have tænkt, at denne Sætning var bevist tidligere, eller at den fulgte af hans her givne Postulater. Nu findes der i flere Udgaver paa dette Sted en Henvisning: »dette er bevist tidligere«, og man ved, at Archimedes har skrevet andre nu forsvundne Arbejder i denne Retning maaske baade en Afhandling om Tyngdepunktet (κεντροβαρικά) og en om Vægtstænger (περὶ ζυγῶν). Men selve Henvisningen er saaledes som det fremhæves i Heibergs Udgave ganske upaalidelig. Den er ogsaa ganske unødvendig, thi der er ingen Tvivl om, at Paastanden er indbefattet i Postulat 7., naar dette opfattes paa den Maade, Archimedes selv viser, han vil have det opfattet. Dette ses af den

Brug han gør af 7. i det første Bevis for Sætning XIII (der indeholder Bestemmelsen af en Trekants Tyngdepunkt). Her siger han, at Tyngdepunktet for en Figur, der er sammensat af flere Dele, hvis Tyngdepunkter alle ligger paa samme Side af en ret Linie, selv maa ligge paa denne Side af Linien. Men opfattes Postulatet paa denne Maade — og den svarer meget godt til Archimedes' Definition af et konvex Omraade i Bogen om Kugle og Cylinder — er den her omtalte Sætning medindbefattet i hans Postulatsystem.

Tilbage bliver kun én Mærkelighed, nemlig den, at Archimedes intet Sted definerer, hvad han vil forstaa ved en Figurs Tyngdepunkt. Her er der kun den ene Mulighed, at Archimedes, hvad Standpunktet i dette Skrift angaar, mener, at Tyngdepunktet er det Punkt, der tilfredsstiller alle hans Postulater.

Det er ogsaa for saa vidt rigtigt nok, som Tyngdepunktet virkelig er bestemt ved Postulaterne, men det er overbestemt ved dem. Det er naturligvis en ubetinget Mangel, men rigtignok en Mangel af en Art, som Oldtidens og mange moderne Forfattere er enige om at begaa. Saaledes opfattes det ofte nutildags — og i Oldtiden altid — at en Polygon har et bestemt Areal. Men da man bestemmer en Polygons Areal som en Sum af Trekanters Arealer, ligger heri en Overbestemthed, da en Polygon paa mange Maader kan deles i Trekanter.

Man kunde stille det Spørgsmaal, om der i Skriftet findes nogen Antydning af, at Archimedes har været sig denne Overbestemthed bevidst. Noget sikkert derom kan ikke siges, men det forekommer mig, at der i Beviset for den sidste Sætning, hvor han bestemmer Tyngdepunktet for et Trapez, findes noget i den Retning. Der bestemmer han nemlig Trapezets Tyngdepunkt hensynsløst ved tre Betingelser, skønt to — saaledes som han selv viser det — havde været fuldstændig tilstrækkelige. Dette er dog for lidt til derpaa at bygge en sikker Slutning.

Et andet Spørgsmaal er det, hvorledes Archimedes har tænkt sig at komme ud over Vanskeligheden, hvis da en saadant har foreligget for ham, men derom giver Skriftet ikke nogensomhelst Vejledning. Man er henvist til Hypotheser, der maa knytte sig til andre nu forsvundne Skrifter. En saadan Hypothese, der bygger paa senere Bemærkninger hos Heron og Pappus, men som synes mig at have stor Sandsynlighed for sig, er opstillet af Vailati, i hans »Il concetto del'centro di gravità nella statica d'Archimede«. Jeg skal imidlertid ikke her gaa ind derpaa — det drejer sig om Ophængningspostulater[1].

Vi er nu i Stand til at samle alle de Forudsætninger, Archimedes benytter til sine Tyngdepunktsbestemmelser, og som man ser, findes deri intet om Ligevægtsforudsætninger.

A. I enhver plan Figur findes et bestemt Punkt, der kaldes Figurens Tyngdepunkt, og som tilfredsstiller følgende Betingelser:

B_1 og B_2. Tyngdepunkterne for to kongruente eller ligedannede Figurer ligger i ensliggende Punkter.

C. Tyngdepunktet for en af to lige store Dele sammensat Figur ligger i Midtpunktet af det Liniestykke, der forbinder Delenes Tyngdepunkter.

D. Er en Figur sammensat af flere Dele, hvis Tyngdepunkter alle ligger paa samme Side af en ret Linie, vil den hele Figurs Tyngdepunkt ogsaa ligge paa samme Side af Linien. Tyngdepunktet for en konvex Figur ligger inden i Figuren.

[1] Jeg benytter denne Lejlighed, hvor jeg citerer Vailati til at bemærke, at denne Forf. klart har indset, at Archimedes' Ligevægtsbetingelse for Vægtstangen bygger paa hans Tyngdepunktslære, saa at den foreliggende Undersøgelse kan betragtes som en fuld Gennemførelse af dette Synspunkt.

Af disse Postulater findes A ikke explicite, men det benyttes som selvfølgeligt.

B findes paa samme Maade hos Arkimedes i hans Postulater 4. og 5.

C findes hos Archimedes som Sætning IV, men i hans Bevis for denne Sætning findes intet andet, end at han her for første Gang, om end i et specielt Tilfælde meddeler, hvad han vil forstaa ved Ligevægt, og derved bliver Sætning IV identisk med hans Postulat 1.

D udtrykker hans Postulat 7 paa en anden Maade, men det er paa den Maade, Postulatet optræder i flere af Beviserne, og det er egentlig fuldstændig tilstrækkeligt at have det udtalt paa den Maade. Men det benyttes paa andre Steder i Skriftet ogsaa saaledes, at Tyngdepunktet for en konvex Figur maa ligge inden i Figuren, og det kan være heldigt ogsaa at fastslaa dette, naar man vil finde Tyngdepunkter for krumlinede Figurer. I Axiomet indbefattes som ovenfor nævnt, at Tyngdepunktet for en Figur, der er sammensat af to Dele, maa ligge i det Liniestykke, der forbinder Delenes Tyngdepunkter (7^b). Tillige siger Postulatet aabenbart, at Tyngdepunktet for en Figur, der er sammensat af to Dele, hvis Tyngdepunkter begge falder i samme Punkt G, ogsaa maa falde i G (7^b).

At disse Postulater giver et i hvert Fald tilstrækkeligt Grundlag for Tyngdepunktsbestemmelsen af en Polygon, er let at se. Det interessante ved Sagen er dog, at Archimedes selv ganske explicite viser det, nemlig ved de alternative Beviser, han giver. Der er ingen Tvivl om, at disse Beviser maa betragtes som ægte[1]; ellers vilde Postulat 4. være uden nogensomhelst Anvendelse, og Sætning 11. og 12. refererer sig ogsaa kun til et af disse alternative Beviser.

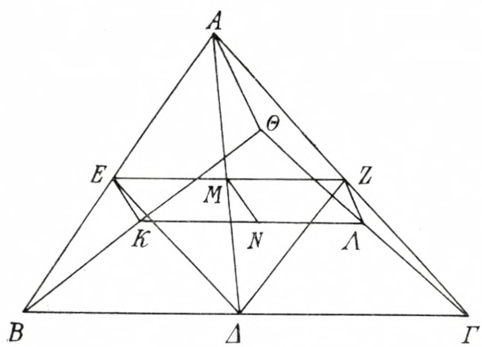
[1] Efter en mundtlig Meddelelse af Hr. Prof. J. L. Heiberg, er der tekstkritisk heller ingen Grund til at nære Tvivl om disse Bevisers Ægthed.

Da enhver Polygon kan deles i Trekanter, kommer det kun an paa at finde Tyngdepunktet for en Trekant. Dette sker hos Archimedes paa følgende elegante Maade:

a. Tyngdepunktet for et Parallelogram ligger i Diagonalernes Skæringspunkt O.

Deler man Parallelogrammet ved en Diagonal i to kongruente Trekanter, maa Tyngdepunkterne for disse ifølge B, ligge symmetrisk med O. Ifølge C bliver Punktet O derfor Parallelogrammets Midtpunkt.

b. Tyngdepunktet for en Trekant ligger i enhver af dennes Medianer.



Figur 1.

Lad $AB\Gamma$ være en Trekant, og lad os antage, at dens Tyngdepunkt Θ ligger udenfor Medianen $A\Delta$. Idet E og Z er Midtpunkterne af henholdsvis AB og $A\Gamma$, sammensættes Trekanten af Parallelogrammet $AZ\Delta E$ og og Trekanterne $EB\Delta$ og $Z\Delta\Gamma$. Da disse Trekanter er ligedannede med og ensstillede med den givne, vil deres Tyngdepunkter ligger henholdsvis i Midtpunktet K af $B\Theta$ og Λ af $\Gamma\Theta$. Tyngdepunktet for den af de to smaa Trekanter dannede Figur bliver derfor ifølge C Midtpunktet N af $K\Lambda$. Men da Parallellogrammets Tyngdepunkt er Midtpunktet M af EZ, maa ifølge D Punktet Θ ligge i Linien MN. Men dette er umuligt, da $MN \neq A\Theta$. Altsaa maa Θ ligge i $A\Delta$.

Som vi ser, giver Archimedes en Tyngdepunktsbestemmelse for en Trekant og derigennem for en vilkaarlig Polygon, der ikke blot er uafhængig af Ophængningspostulater men ogsaa er uafhængig af hans Ligevægtssætning, selv om denne ogsaa optræder som en Tyngdepunktssætning.

Vi maa dog endnu se ogsaa paa denne Sætning, der er den berømteste i hele Skriftet. Den lyder som bekendt — med lidt andre Betegnelser end hos Archimedes — at naar to Størrelser α og β har Tyngdepunkterne A og B, vil Tyngdepunktet for Figuren $A + B$ være det Punkt O, der deler Liniestykket AB saaledes, at $AO : OB = \beta : \alpha$.

Beviset føres særskilt for det Tilfælde, at α og β er kommensurable og at de er inkommensurable.

I det første Tilfælde er Beviset fra mangfoldige Gengivelser saa bekendt, at det ikke er nødvendigt at gentage det her[1]. Beviset beror i alt væsentligt paa, at man, naar man skal bestemme Tyngdepunktet for en af to Figurer α og β sammensat Figur med Tyngdepunkterne A og B, kan erstatte α med $\frac{\alpha}{2}$ og $\frac{\alpha}{2}$, hvis Tyngdepunkter ligger paa Linien AB symmetrisk med Hensyn til A. Dette er fuldstændig tilladeligt efter hans Postulater. Ikke desto mindre er der fremkommet Indvendinger herimod af Mach[2] og af Hölder[3]. Dette beror imidlertid paa, at disse Forff. slet ikke har lagt Mærke til, at Sætningen, saaledes som den fremtræder hos Archimedes, er en Tyngdepunktssætning, og kun i anden Linie — nemlig ved en ren Definition — er bleven udtalt som en Ligevægtssætning. Denne Omstændighed er med al ønskelig Tydelighed og paa en udmærket Maade udtalt af Vailati i hans »La dimonstrazione del principio della Leva data da Archimede nel libro primo sul'equilibrio delle figure piane.[4]«

Men vi maa ogsaa se paa det Tilfælde, at α og β er

[1] Det findes ogsaa paa Dansk i en autograferet Forelæsning af Prof. C. Christiansen.

[2] E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, S. 10 o. f.

[3] Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, S. 63 o. f.

[4] Ved den historiske Kongres i Rom 1904, ogsaa i Scritti di Vailati, p. 497—502.

inkommensurable, thi her fremkommer noget nyt. Beviset er overleveret i en noget lemlæstet Skikkelse, men har dog været let at rekonstruere[1]. Beviset lyder som følger:

Lad de to Størrelser være $A + B$ og Γ, og lad ΔZ være en Linie delt i E saaledes, at

$$A + B : \Gamma = \Delta E : EZ.$$

Lad os antage, at $A + B$ anbragt i Z er for stor til at holde Ligevægt om E med Γ anbragt i Δ. Vi kan da fra $A + B$ borttage en Størrelse, * der er mindre end en saadan, der vilde bringe Resten til at holde Ligevægt med Γ* og saaledes, at A og Γ bliver kommensurable. Da er

$$A : \Gamma < \Delta E : EZ,$$

og D vil derfor blive nedbøjet, hvilket strider mod det antagne. Da man kan føre Beviset paa samme Maade, ifald Γ blev nedbøjet, maa Tyngdepunktet for den af $A + B$ og Γ sammensatte Figur ligge i Γ.

For at dette kan være forstaaeligt, maa man have at vide, hvorledes man af de opstillede geometriske Uligheder kan udlede, at en af Størrelserne bliver »nedbøjet«. Men derom giver Beviset ogsaa fuldstændig Besked. Den ovenfor understregede som selvfølgelig betragtede Omskrivning af den foranstaaende Ulighed viser, at Archimedes derved, at to Størrelser A og B ikke er i Ligevægt om et Punkt C, men at f. Ex. B er nedbøjet, forstaar, at den samlede Figurs Tyngdepunkt ligger paa den anden Side af C som B.

Men derved bliver ogsaa Postulaterne 2. og 3. til Tyngdepunktspostulater. Postulat 2. lyder nemlig i Virkeligheden — d. v. s. i den Form, hvori det bruges i Beviset — saaledes: Naar to Størrelser tilsammentagne har et Tyngdepunkt beliggende paa Forbindelseslinien mellem Delenes Tyngdepunkter, og den ene Størrelse forøges, saa vil den samlede Figurs Tyngdepunkt flytte sig til den Side, hvor Forøgelsen er sket.

[1] Se: Heiberg, Archimedis opera omnia, vol II, p. 139.

Postulat 3. svarer til, at den ene af Størrelserne formindskes. Archimedes medindbefatter i Paastanden, at Forøgelsen (eller Formindskelsen) kan vælges saa lille, at Tyngdepunktsflytningen ogsaa bliver saa lille, man selv vil; dette ligger i den Del af Beviset, der ovenfor er sat mellem to *.

Opfattes Postulaterne 2. og 3. paa den Maade, bliver Beviset for Sætning VII fuldstændig klart og tydeligt.

Vi har tillige set, at Vægtstangssætningen indtager en Særstilling i Skriftet, idet Beviset for den paa Grund af det inkommensurable Tilfælde kræver flere Postulater — nemlig 2. og 3. samt den sidste Del af 1. — end alle de øvrige Tyngdepunktsbestemmelser.

Vi er nu færdige med denne Kommentar og mener at have paavist, at Archimedes' Skrift »Om plane Figurers Ligevægt eller om plane Figurers Tyngdepunkter« i Virkeligheden slet ikke er noget mekanisk, men et rent geometrisk eller med moderne Betegnelser et massegeometrisk Arbejde. Man kan endogsaa efter min Mening, og i den stærkeste Modsætning til E. Mach's Opfattelse, gaa saa vidt at sige, at der i selve Skriftet ikke er nogetsomhelst, der leder Tanken i Retning mod det Moment, som senere spiller Hovedrollen ved Ligevægtsbetingelser.

Naar vi har hævdet, at en Figurs Tyngdepunkt, saaledes som det optræder i det Skrift, vi behandler, er et Punkt, der ligefrem er defineret ved de opstillede Postulater, er det naturligvis ikke vor Mening, at hverken Archimedes selv eller muligvis nogen anden før ham er kommen ind paa en Teori for Tyngdepunkter ad den Vej. Der er selvfølgelig ingen Tvivl om, at man er kommen ind derpaa ved at betragte de Ophængningslinier, der fremkommer, naar et Legeme ophænges i forskellige af dets Punkter, og dette gaar ogsaa Vailati ud fra i sine ovenfor omtalte Rekonstruktionsforsøg af »περὶ ζυγῶν«. Men Archimedes viser, at det er muligt at definere Tyngdepunktet ved rent geometriske Forudsætninger.

Den tidligere omtalte Mangel ved Systemet maa man heller ikke tilskrive for stor Betydning, da man som allerede ovenfor nævnt begaar en lignende Fejl, naar man uden særlige Beviser tillægger en plan Polygon et bestemt Areal. Naar man — som man ogsaa gør det i flere moderne Lærebøger — tillægger et skraat afskaaret Prisme et bestemt Volumen uafhængig af den Maade, hvorpaa det deles i tresidede Prismer, begaar man ikke blot en lignende, men egentlig den selvsamme Fejl.

Det ligger nær endnu at se paa de andre Steder hos Archimedes, hvor der er Tale om faste Legemers Tyngdepunkt eller Ligevægt. Den anden Del af det Skrift, vi her har undersøgt, frembyder ikke noget principielt nyt i den Henseende, vi har for Øje. Men Tyngdepunktet spiller ogsaa en Rolle i Archimedes' Parabelkvadratur. Her ophænges en Trekant eller et Trapez i det ene Endepunkt af en Vægtstang, og det er af væsentlig Betydning, at Tyngdepunktet ligger lodret under Ophængningspunktet. Første Gang dette benyttes finder man en Henvisning til, at dette er paavist i et tidligere Skrift. Det er ganske interessant — gennem den Heibergske Udgave — at faa oplyst, at denne Henvisning ikke kan betragtes som upaalidelig, medens derimod en tilsvarende Henvisning i Skriftet »Plane Figurers Ligevægt« var ganske upaalidelig. Dette stemmer nemlig ganske med det, man af indre Grunde vilde anse for rimeligt. I det sidstnævnte Skrift er der nemlig slet ikke Tale om nogen Ophængning, hvad der derimod er Tilfældet i Parabelkvadraturen, og derfor har der kun ved den sidste været nogen Anledning til en Henvisning til et tidligere Skrift, der har handlet om ophængte Figurer.

Endelig tales der ogsaa om Tyngdepunkter i den af Heiberg genfundne Metodelære, som af Archimedes er sendt til Eratosthenes. Heri findes blandt andet den smukke Bestemmelse af en Halvkugles Tyngdepunkt. Ogsaa dette

Skrift indledes med et Postulatsystem. Alle disse Postulater — med Undtagelse af et enkelt arithmetisk — handler om Tyngdepunkter, og det er let at se, at de alle kan udledes af Postulaterne i Skriftet »Om plane Figurers Ligevægt«, dog véd man ikke sikkert, hvorledes han har fundet en Kegles Tyngdepunkt. Men i Skriftet selv tales paa mange Steder om, at to Størrelser er i Ligevægt om et eller andet Punkt. Her et det altsaa hævet over enhver Tvivl, at Archimedes derved, at to Størrelser holder hinanden i Ligevægt om et Punkt A, forstaar, at den samlede Figurs Tyngdepunkt ligger i A. Han indtager altsaa i Methodelæren det samme Standpunkt som i Skriftet om plane Figurers Ligevægt.

Det Bevis, Archimedes giver for Ligevægtsbetingelser for en Vægtstang, er maaske noget tungt, og man har Vidnesbyrd om, at man allerede i Oldtiden har søgt at naa det samme Resultat ad andre Veje. Dette tog særlig Fart i Begyndelsen af den nyere Tid, hvor der findes indbyrdes ikke meget afvigende Beviser af Luca Valerio, Galilæi og Huyghens, for at nævne de mest bekendte. Disse Beviser er sikkert mere overskuelige end det, Archimedes giver, men de deler ikke med det gamle det store videnskabelige Fortrin der ligger i at bygge paa et klart angivet Postulatsystem.

Tillæg.

De i den foranstaaende Kommentar Side 6 opstillede Postulater A, B, C og D er ikke udtrykte paa den Maade hos Archimedes, men de giver det nøjagtige Udtryk for den Maade, hvorpaa Postulater 1 . . . 7. Side 2 er benyttede i Beviserne. Det er ganske interessant, at det samme Postulatsystem giver Anvisning paa Løsning af en Opgave, der er ganske moderne i sin Formulering, men som dog ikke, saavidt jeg véd, findes behandlet nogetsteds. Opgaven er nemlig den at finde Tyngdepunktet for en Polygon uden at gøre Brug af infinitesimale Bestemmelser.

Begyndelsen hertil — og egentlig det vigtigste af det hele — er, at Archimedes har fundet paa en Maade til Bestemmelse af en Trekants Tyngdepunkt, der alene benytter sig af endelige Fladestykker. For derudfra at finde en Polygons Tyngdepunkt maa man dele Polygonen i Trekanter α_1, α_2, α_3, hvis Tyngdepunkter være A_1, A_2, $A_3 \ldots$ Nu giver det en stor Simplifikation — men er ikke nødvendigt — ogsaa at benytte sig Sætning 6. og 7. i Archimedes' Skrift, og dette vil vi til at begynde med ogsaa gøre. Man kan da først bestemme et Punkt B paa Liniestykket A_1A_2 saaledes, at $A_1B : BA_2 = \alpha_2 : \alpha_1$, dernæst et Punkt C paa Liniestykket BA_3 saaledes, at $BC : CA_3 = \alpha_3 : \alpha_1 + \alpha_2$ og saaledes videre paa sædvanlig Maade, til man tilsidst naar Tyngdepunktet G for hele Polygonen. Det er nu en ren geometrisk Sætning, der, om man vil, let kan bevises ved ligedannede Trekanter, at Ordinater η til det fundne Punkt G bestemmes ved

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots)\ \eta = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 a_3 + \ldots, \quad (1)$$

hver a_1, a_2, a_3 ... er Ordinaterne til Tyngdepunkterne for Trekanterne α_1, α_2, α_3 ... i et eller andet retvinklet Koordinatsystem. Da Bestemmelsen af η er symmetrisk i α_1, a_1, α_2, a_2, α_3, a_3 .., ser man straks, at det er ligegyldigt, i hvilken Orden man benytter Trekanterne α_1, α_2, α_3 ... Men Polygonen kan paa utallige Maader deles i Trekanter, og det, som det kommer an paa, er at vise, at alle Delinger fører til samme Resultat.

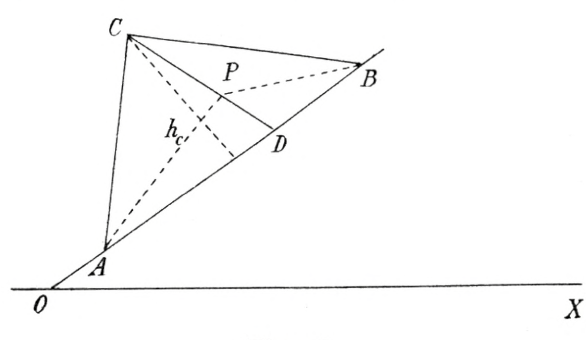
Lad os først betragte en Trekant ABC. Lad Linien AB skære X-axen i O og lad D være et vilkaarligt Punkt paa Siden AB. Naar Ordinaterne til A, B, C og D henholdsvis er a, b, c og d, vil ifølge Archimedes Ordinaterne til Tyngdepunkterne for Trekanterne CAB, CAD og CDB henholdsvis være $\frac{1}{3}(a+b+c)$, $\frac{1}{3}(a+c+d)$ og $\frac{1}{3}(b+c+d)$.

Vi vil nu for Kortheds Skyld, naar Vinkelspidserne af en Trekant MNP har Ordinaterne m, n og p, betegne Produktet $\frac{1}{3}(m+n+p)\cdot MNP$ ved $[MNP]_X$ og kalde det Trekantens Moment med Hensyn til X-axen. Naar der ikke kan komme nogen Misforstaaelse, vil vi ogsaa betegne en Trekant med α og betegne dens Moment med $[\alpha]_X$.

Man kan nu bevise:

$$[CAD]_X + [CDB]_X = [CAB]_X \tag{2}$$

Bortdividerer man af denne Ligning $\frac{1}{3}h_c$, udelader man dernæst paa begge Sider af Lighedstegnet Størrelsen $c \cdot AB$, og



Figur 2.

erstatter man endelig a, b og d med de dermed proportionale Liniestykker OA, OB og OD (se Fig. 2), gaar (2) over til

$$(OA + OD)AD + (OD + OB)DB = (OA + OB)AB.$$

Men skriver man denne Ligning paa Formen:

$$OA(AD - AB) + OD(AD + DB) = OB(AB - DB),$$

ser man, at man har den bekendte Relation mellem 4 Punkter paa en ret Linie:

$$OA \cdot BD + OD \cdot AB = OB \cdot AD.$$

Denne sidste Ligning gælder ganske almindelig, naar man regner med Fortegn paa sædvanlig Maade. Ligning (2) vil da ogsaa gælde almindelig, naar vi vedtager at regne to Momenter $[PAB]$ og $[OAB]$ med modsatte Fortegn, naar de ved PAB og OAB bestemte Omløbsretninger er modsatte[1].

Er nu P et vilkaarligt Punkt af AD — altsaa et vilkaarligt Punkt i Planen — faar man paa samme Maade

$$[PCA]_X + [PAD]_X = [CAD]_X$$

og

$$[PDB]_X + [PBC]_X = [DBC]_X,$$

hvoraf med Addition

$$[PAB]_X + [PBC]_X + [PCA]_X = [ABC]_X \tag{3}$$

Kaldes $\triangle\ ABC$ for Kortheds Skyld α, og benævnes venstre Side af (3) ved $[P\alpha]_X$, har man altsaa:

$$[P\alpha]_X = [\alpha]_X. \tag{3^1}$$

Lad nu en Polygon $ABC \ldots KL$ være delt paa en eller anden Maade i Trekanter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, der ligger ved Siden af hinanden. Man har da ifølge (3^1)

$$[P\alpha_1]_X + [P\alpha_2]_X + \ldots [P\alpha_n]_X = [\alpha_1]_X + [\alpha_2]_X + \ldots [\alpha_n]_X. \tag{4}$$

Er nu f. Ex. α_r og α_s to Trekanter, der har en Side MN fælles, skal $[PMN]_X$ regnes med forskelligt Fortegn ved Dannelsen af de to Aggregater $[P\alpha_r]_X$ og $[P\alpha_s]_X$. Naar nemlig P ikke ligger paa Linien MN — i hvilket Tilfælde $[PMN]_X = O$ — vil den ene og kun den ene af de Vinkelspidser i α_r og

[1] En cyklisk Ombytning af Trekantens Vinkelspidser forandrer ikke Momentet.

a_s, der er modstaaende til Siden MN ligge paa samme Side af MN som P. Da Polygonens Sider — eller Dele af dem — er de eneste Trekantssider, der ikke forekommer i to Trekanter, har man altsaa:

$$[P\alpha_1]_X + [P\alpha_2]_X + \ldots [P\alpha_n]_X$$
$$= [PAB]_X + [PBC]_X + \ldots [PKL]_X + [PLA]_X$$

eller ifølge (4)

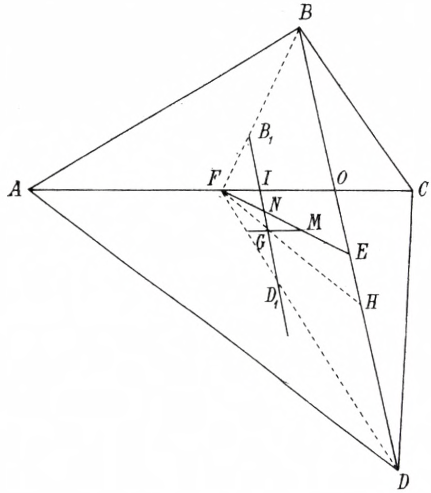
$$[\alpha_1]_X + [\alpha_2]_X + [\alpha_3]_X + \ldots [\alpha_n]_X$$
$$= [PAB]_X + [PBC]_X + \ldots [PKL]_X + [PLA]_X.$$

Fastholder man nu en bestemt Inddeling af Trekanter, ser man af denne Ligning, at højre Side af Ligningen er uafhængig af Valget af P, og deraf følger atter, at $[\alpha_1]_X + [\alpha_2]_X + \ldots [\alpha_n]_X$ er uafhængig af den Maade, hvorpaa Polygonen er inddelt i Trekanter. Men $\Sigma|a_r|_X$ er netop $\Sigma a_r a_r$ i Formel (1), saa at η og derved Tyngdepunktet er uafhængig af Inddelingen.

Ved denne Undersøgelse har vi benyttet os af Sætning VI og VII hos Archimedes. Ved Beviset for denne Sætning benytter han sig imidlertid som ovenfor nævnt (se Side 11) af Kontinuitetsforudsætninger, der implicite ligger i hans Postulater 2. og 3. Det er imidlertid ogsaa muligt at befri Tyngdepunktsbestemmelsen af en Polygon fra saadanne Forudsætninger. Vil man f. Ex. finde Tyngdepunktet for en Firkant, kan man først dele denne ved en af Diagonalerne i to Trekanter og forbinde deres Tyngdepunkter, og dernæst dele den ved den anden Diagonal og forbinde de to derved fremkomne Deletrekanters Tyngdepunkter. Firkantens Tyngdepunkt kan da paa en ny Maade bestemmes som Skæringspunktet mellem de to nævnte Forbindelseslinier. Det er klart, at man kan gaa videre paa den Maade.

For at vise, at man ogsaa ad den Vej faar et Tyngdepunkt, der er uafhængigt af Delingen, er det naturligst at støtte sig til den foregaaende Udvikling.

Lad os først betragte en Firkant $ABCD$. Lad Midtpunkterne af Diagonalerne AC og BD være henholdsvis F og E. Liniestykket EF deler vi i tre ligestore Stykker EM, MN og NF. Den Linie, der forbinder Tyngdepunkterne B_1 og D_1 for Trekanterne ACB og ACD, vil være en Linie, der gaar gennem N og er parallel med BD, og den Linie, der forbinder Tyngdepunkterne for Trekanterne BDA og BDC, være en Linie, der gaar gennem M og er parallel med AC. Det paa den nye Maade bestemte Tyngdepunkt bliver altsaa Skæringspunktet mellem de to nævnte Linier. For nu at godtgøre, at det saaledes bestemte Punkt G bliver det samme som det tidligere fundne Tyngdepunkt, kommer det kun an paa at vise:



Figur 3.

$$B_1G : GD_1 = \triangle\, ACD : \triangle\, ABC = DO : OB$$

hver O er Diagonalernes Skæringspunkt.

Lad Linien FG skære BD i H og AC skære NG i I. Man har da

$$\triangle\, NIF \backsimeq \triangle\, NGM$$

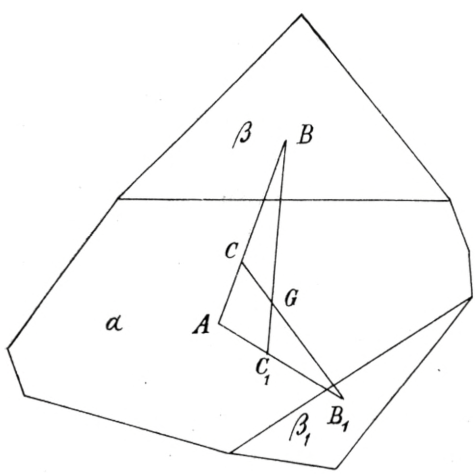
da Trekanterne er ligedannede og $NF = NM$. Deraf følger $IN = NG$, altsaa $OE = EH$, hvoraf endelig $BO = HD$ og $DO = HB$.

Nu ser man strax

$$\frac{B_1G}{GD_1} = \frac{BH}{HD} = \frac{OD}{BO} \qquad \text{qu. e. d.}$$

Hvis man nu ad samme Vej vil finde Tyngdepunktet for en Femkant $ABCDE$, deler man Femkanten ved to Diagonaler, f. Ex. AC og AD i en Firkant og en Trekant og forbinder paa de to mulige Maader en Trekants Tyngdepunkt B_1 med en Firkants Tyngdepunkt A_1, hvorefter Skæringspunktet mellem Forbindelseslinierne giver det søgte Tyngdepunkt G. For at vise, at det derved bestemte Punkt G er det samme som det, der blev bestemt ved den tidligere Fremgangsmaade, kommer det kun paa, at A_1G forholder sig til GB_1 ligesom Trekantens Areal til Firkantens. At man nemlig i Formlen (1) til Bestemmelse af η kan lade α og a betyde ikke blot en Trekants og dens Tyngdepunkts Ordinat, men ligesaa godt en vilkaarlig Delepolygons og dens Tyngdepunkts Ordinat, følger øjensynlig af Formlens Struktur.

Vi vil nu antage, at vi er naaede saa vidt, at vi for en vilkaarlig n-kant har paavist, at begge de anførte Konstruktioner fører til samme Resultat. Dette har vi allerede gjort for $n = 4$. Vi vil nu vise, at det samme ogsaa gælder for en $(n+1)$-kant. Vi kan altid, naar $n > 4$ drage to Diagonaler, der ikke skærer hinanden, hvorved $(n+1)$-kanten sammensættes af en Polygon α med et Sideantal, der er mindre end $n - 1$, og af to Trekanter β og β_1. Tyngdepunkterne for α, β og β_1 være henholdsvis A, B og B_1. Tyngdepunktet for Polygonen $\alpha + \beta$ er da efter Forudsætningen



Figur 4.

det Punkt C, der deler Linien AB saaledes, at

$$AC : CB = \beta : \alpha$$

og Tyngdepunktet for Polygonen $\alpha + \beta_1$ det Punkt C_1, der deler Linien AB_1 saaledes, at

$$AC_1 : C_1B_1 = \beta_1 : \alpha.$$

Tyngdepunktet for $(n+1)$-kanten efter den nye Metode er da Skæringspuuktet G mellem Linierne BC_1 og B_1C. Det kommer nu an paa at bevise

$$BG : GC_1 = \alpha + \beta_1 : \beta.$$

Men opfatter man B_1C som en Transversal til Trekant ABC_1 giver Menelaos' Sætning

$$\frac{BG}{C_1G} \cdot \frac{C_1B_1}{AB_1} \cdot \frac{AC}{BC} = 1, \text{ hvorved}$$

$$\frac{BG}{GC_1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta_1 + \alpha}{\alpha} = \frac{\beta_1 + \alpha}{\beta} \qquad \text{qu. e. d.}$$

Det er nu, uden at vi behøver at gaa videre, øjensynligt, at begge Metoder uafhængig af den Delingsmaade, man bruger, maa føre til samme Resultat.

Det er klart, at vi ved denne Udvikling tillige har udjævnet den Mangel, som man maa sige at der fandtes i Archimedes' Skrift.

Vi vil endnu til Slutning angive det Minimum af Forudsætninger, hvorpaa Tyngdepunktsbestemmelserne beror.

I enhver plan Polygon eller af plane Polygoner sammensat Figur findes et Punkt, der kaldes Tyngdepunktet og tilfredstiller følgende Fordringer.

I. I to Figurer, der enten er kongruente eller ligedannede, ligger Tyngdepunkterne i ensliggende Punkter.

II. Tyngdepunktet for en af to kongruente og parallelforskudte Figurer sammensat Figur ligger i Midtpunktet af det Liniestykke, der forbinder Figurernes Tyngdepunkter.

III. Tyngdepunktet for en Figur, der er sammensat af to andre, ligger i den Linie, der forbinder Delenes Tyngdepunkter.

Af disse Postulater benyttes I og II kun til at bestemme en Trekants Tyngdepunkt efter Archimedes' Metode. For at komme videre har man kun at anvende de to Metoder, som Archimedes med stor Klarhed har angivet i Beviset for den sidste Sætning i hans Skrift, Sætning XV, hvor han bestemmer Tyngdepunktet for et Trapez. Ved disse Beviser er der hverken Brug for nogen Deling i uendelig smaa Elementer eller for nogen Kontinuitetsforudsætning.

Det er let at udvide Archimedes' Bestemmelse af en Trekants Tyngdepunkt til Bestemmelsen af et Tetraeders Tyngdepunkt. Derefter skal der kun yderst faa Forandringer i ovenstaaende Udviklinger til paa analog Maade at faa Tyngdepunktet for et Polyeder bestemt uden at tage Hensyn til andet end endelige Figurdele.